МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

Н. И. САВОСТЬЯНОВА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графической работы

по математическому анализу

Рекомендовано учебно-методической комиссией
кафедры "Математическая кибернетика" МАИ
для студентов 4 факультета
I курс, I семестр

Москва
2009

Оригинал-макет подготовлен Слободской П.С. и Никаноровой Е.А.

Оглавление

1. Типовой вариант расчетно-графической работы
2. Построение кривой, заданной в параметрической форме или в полярной системе координат (методические указания к п. I расчетно-графической работы)
2.1. Параметрические задание кривой
2.2. Построение кривой в полярной системе координат
3. Исследование функции $f(x)$ на непрерывность
3.1. Исследование функции $f(x)$ на непрерывность в точке (методические указания к п. II а)
3.2. Исследование функции $f(x)$ на непрерывность на промежутке (методические указания к п. II б)
4. Комплексные числа, действия над ними, решение уравнений в комплексной области (методические указания к п. III а, б)
4.1. Основные определения
4.2. Арифметические действия над комплексными числами
4.3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа
4.4. Алгебраические действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Решение уравнений
5. Исследование функции и построение ее графика (методические указания к п. IV)
6. Дифференцирование функций многих переменных и его приложения
6.1. Исследование на экстремум функции $u = f(x, y, z)$ (методические указания к п. V а)
6.2. Геометрические приложения (методические указания к п. V б)
7. Геометрические приложения определенного интеграла (методические указания к п. VI)
8. Отыскание области сходимости степенного ряда (методические указания к п. VII)

Литература

1. Типовой вариант расчетно-графической работы

I. Построить кривую: $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

IIа. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность в указанной точке x_0, если

$f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$, $x_0 = -\dfrac{1}{3}$.

Построить график $f(x)$ в окрестности точки x_0.

IIб. Исследовать $f(x)$ на непрерывность на данном промежутке; построить график $f(x)$ на этом промежутке, если

$$f(x) = \begin{cases} x+3, -2 \le x < 0, \\ 1, x = 0, \\ x^2, 0 < x \le 2. \end{cases}$$

IIIа. Вычислить: $\left|z_1 z_2\right|$, $\arg z_2$, $\mathrm{Re}(z_1 z_2^2)$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$, если

$z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

IIIб. Решить уравнение: $z^3 = -2 + 2i$.

IV. Исследовать функцию $f(x)$ и построить ее график, если

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

Va. Исследовать функцию $u(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz - 4x + 4z$.

Vб. Найти $\overline{\mathrm{grad}}\, f(M)$ и производную в направлении $\overline{\mathrm{grad}}\, f(M)$, если

$f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, в точке $M(0,1,1)$.

VI. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

VII. Найти область сходимости степенного ряда

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2. Построение кривой, заданной в параметрической форме или в полярной системе координат (методические указания к п. I расчетно-графической работы)

Условие: построить кривую. Кривая задана либо в параметрической форме, либо в полярной системе координат.

2.1. Параметрическое задание кривой

$\begin{cases} x = x(t) \to X \ \text{— множество значений функции } x(t), \\ y = y(t) \to Y \ \text{— множество значений функции } y(t), \\ t \in T \ \text{— множество значений параметра } t. \end{cases}$

Для функции $y(x)$ множество X есть область определения, множество Y — область значений. Кривая строится в декартовой системе координат по точкам с использованием табл. 1.

Таблица 1

t	x	y
t_0	$x(t_0)$	$y(t_0)$
…	…	…

Пример 1. Построить кривую $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ заданную в параметрической форме.

Решение.

Заметим, что $t \in [0;2\pi]$, так как $T = 2\pi$ — период для функций $x(t)$ и $y(t)$.

При этом: $x = [-3;3]$, $y = [-2;2]$, так как $-1 \le \cos t \le 1$ и $-1 \le \sin t \le 1$.

В данном случае можно получить дополнительные сведения о кривой, исключив параметр t:

$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos t \\ \dfrac{y}{2} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, так как $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Пусть точка $(x;y)$ лежит на этой кривой, т.е. для нее справедливо $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, но тогда точка $(-x;y)$ также лежит на этой кривой, так как $\dfrac{(-x)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, или $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Это означает, что кривая симметрична относительно оси OY. Аналогично точка $(x;-y)$ также лежит на кривой, отсюда следует симметрия кривой относительно оси OX.

Эта двойная симметрия позволяет построить кривую в одной четверти плоскости OXY и затем отразить относительно осей OX и OY.

Составим таблицу:

Таблица 2

t	x	y
0	3	0
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$	1
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}1$	$\sqrt{2}$
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{3}{2}$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{\pi}{2}$	0	2

$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$

Найденные точки лежат в I-ой четверти: от точки (3;0) на оси OX до точки (0;2) на оси OY. Строим по точкам график в первой четверти и отражаем симметрично. Результат изображен на рис. 1.

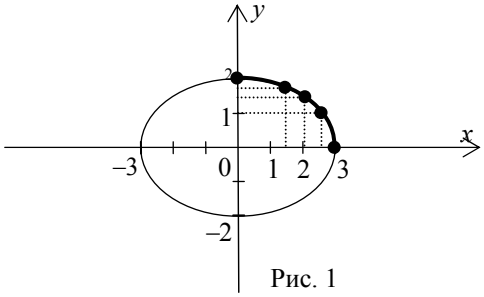


Рис. 1

Пример 2. Построить кривую $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \end{cases}$ заданную в параметрической форме.

Решение.

Заметим, что $t \in (-\infty;+\infty)$; $x(0) = 0$; $y(0) = 0$;

Вычислим пределы:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^3}{1+t^2} = +\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^3}{1+t^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow X = (-\infty;+\infty);$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Y = [0;1).$$

Составим таблицу:

Таблица 3

t	–2	–1	0	1	2	3
x	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}$	2,7
y	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	0,9

Из табл. 3 видно, что кривая симметрична относительно оси OY. Строим график по точкам в первой четверти и отражаем симметрично. Результат изображен на рис. 2.

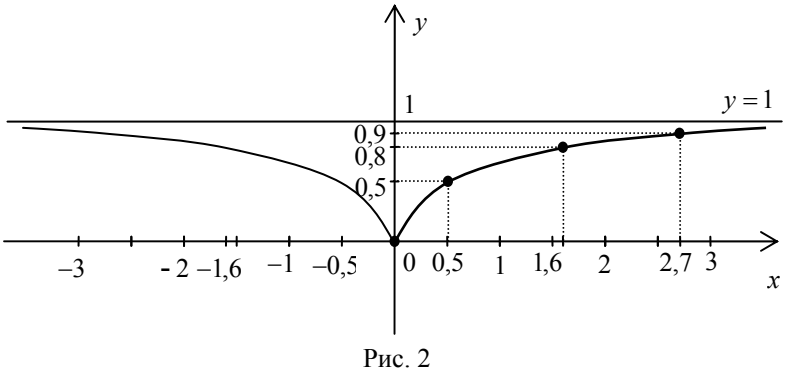
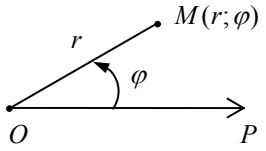


Рис. 2

2.2. Построение кривой в полярной системе координат



точка O — полюс, OP — полярная ось,
r и φ — ***полярные координаты***

Рис. 3

$r \geq 0$ - расстояние от точки M на плоскости до точки O (полярный радиус);
$0 \leq \varphi < 2\pi$, φ - угол между OM и OP (полярный угол). В точке O угол не определен.

Уравнение кривой: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [a;b]$.

Кривая существует только для тех значений φ, для которых $r(\varphi) \geq 0$. При построении на луче φ_0 от точки O откладывают расстояние $r_0 = r(\varphi_0)$, повторяя эту процедуру для всех $\varphi \in [a;b]$.

Пример 1. Построить кривую $r = a(1+\cos\varphi)$, где $a > 0$.

Решение.

Так как $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$, то $r \geq 0$ при всех $\varphi \in [0;2\pi)$.

Здесь можно также заметить, что $r(-\varphi) = r(\varphi)$: $a(1+\cos(-\varphi)) = a(1+\cos\varphi)$, а это означает, что кривая симметрична относительно полярной оси (рис. 4).

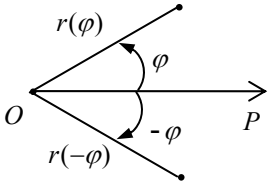


Рис. 4

Поэтому можно составить таблицу для $\varphi \in [0;\pi]$, а затем использовать симметрию относительно полярной оси.

Таблица 4

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	$2a$	$a(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 1{,}7a$	a	$a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 0{,}3a$	0

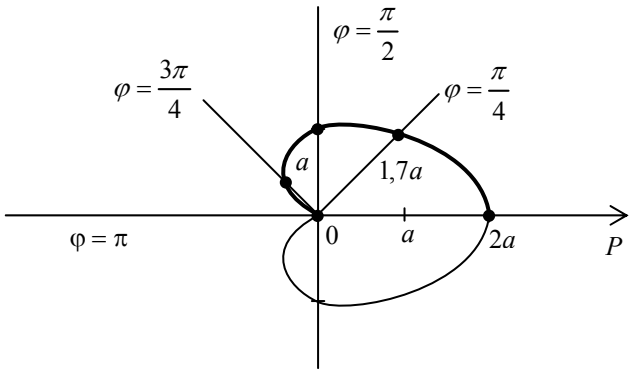


Рис. 5

Полученная кривая называется ***кардиоидой*** (рис. 5).

Пример 2. Построить кривую $r = \sin 2\varphi$.

Решение.

Найдем те значения φ , для которых $\sin 2\varphi \ge 0$: $0 \le 2\varphi \le \pi$; $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, или на всей оси: $\pi k \le \varphi \le \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

На отрезке $[0;2\pi]$ получаем два промежутка: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, так как полярный угол $\varphi \in [0;2\pi)$.

Функция $r = \sin 2\varphi$ имеет период $T = \pi$, так как $\sin 2(\varphi + \pi) = \sin 2\varphi$, поэтому значения для r на лучах φ и $\varphi + \pi$ одинаковы.

Таблицу сделаем для $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

Таблица 5

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

На лучах $(\varphi + \pi)$ откладываем расстояние $r(\varphi)$.

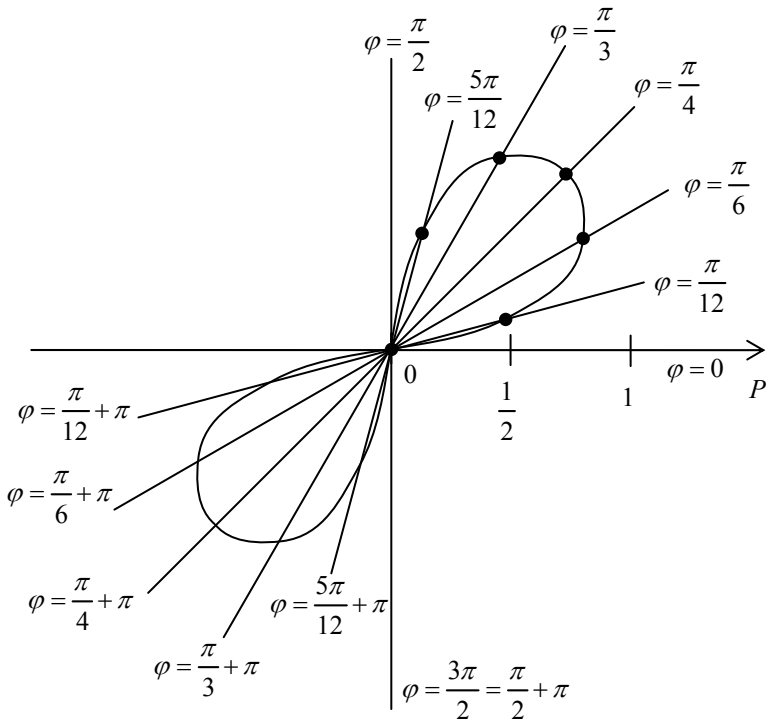


Рис. 6

3. Исследование функции $f(x)$ на непрерывность

При исследовании функции на непрерывность следует вычислить ее односторонние пределы в точке разрыва и охарактеризовать разрыв.

Разрыв I рода: односторонние пределы существуют и конечны. Если они при этом и равны, то разрыв называют ***устранимым*** (если функция не определена в точке).

Разрыв II рода: хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

3.1. Исследование функции *f(x)* на непрерывность в точке (методические указания к п. II а)

Исследовать $f(x)$ на непрерывность в указанной точке; начертить график функции $f(x)$ вблизи точки разрыва.

Пример 1. $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$, $x_0=-\dfrac{1}{3}$.

Решение.

Вычисляем односторонние пределы: $\Rightarrow x_0=-\dfrac{1}{3}$ – точка разрыва II рода.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}-0} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}-0}\frac{1}{3x+1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}+0} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}+0}\frac{1}{3x+1}=+\infty;$$

График $f(x)$ изображен на рис. 7.

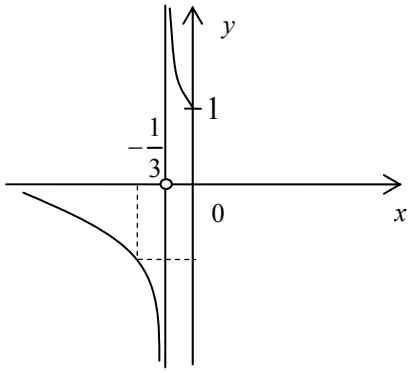


Рис. 7

Пример 2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, $x_0=0$.

Решение.

Вычисляем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{-x}=-1;$$ $\Rightarrow x_0=0$ – точка разрыва I рода.

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

График $f(x)$ изображен на рис. 8.

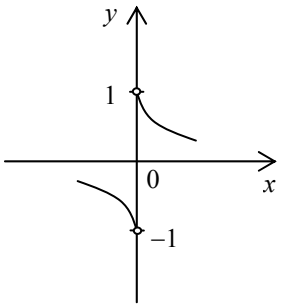
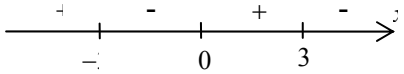


Рис. 8

Пример 3. $f(x)=2^{\frac{x}{9-x^2}}$, $x_0=3$.

Решение.

Найдем знаки функции $\dfrac{x}{9-x^2}$:



откуда ясно, что $\dfrac{x}{9-x^2}\to+\infty$ при $x\to 3-0$ и $\dfrac{x}{9-x^2}\to-\infty$ при $x\to 3+0$.

Тогда при вычислении односторонних пределов имеем:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}f(x)=\lim_{x\to 3-0}2^{\frac{x}{9-x^2}}=+\infty;$$

$\Rightarrow x_0=3$ – точка разрыва II рода.

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}f(x)=\lim_{x\to 3+0}2^{\frac{x}{9-x^2}}=0;$$

График $f(x)$ изображен на рис. 9.

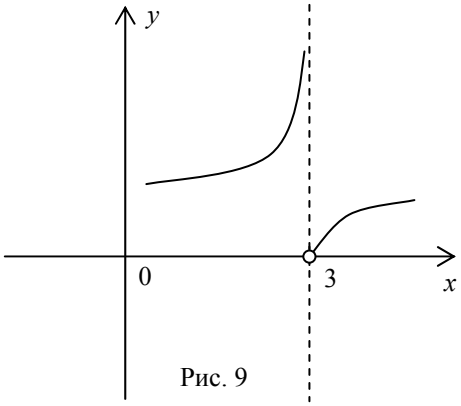


Рис. 9

Пример 4. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, $x_0=1$.

Решение.

Заметим, что x_0 - точка разрыва, так как $f(x)$ не определена в этой точке.

Вычисляем односторонние пределы:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2};$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Очевидно, $f(1-0)=f(1+0)=-\dfrac{1}{2}$, следовательно, $x_0=1$ - точка устранимого разрыва I рода.

График $f(x)$ изображен на рис. 10.

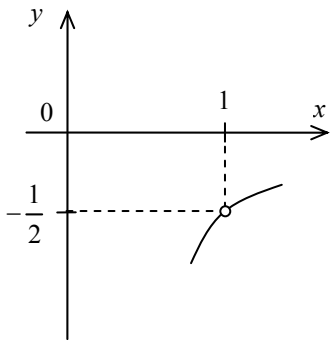


Рис. 10

3.2. Исследование функции *f(x)* на непрерывность на промежутке (методические указания к п. II б)

Исследовать $f(x)$ на непрерывность на промежутке; построить график функции $f(x)$ на этом же промежутке.

Здесь следует исследовать точки, в которых $f(x)$ не определена; точки, в которых $f(x)$ слева и справа задана по-разному, а также концы промежутка, если они входят в промежуток.

Пример 1. $f(x)=\begin{cases} x+3, -2 \le x < 0; \\ 2, x = 0; \\ x^2, 0 < x \le 2. \end{cases}$

Решение.

Исследуем поведение функции в точках $x=0$, $x=-2$, $x=2$.

Следует отметить, что $f(x)$ непрерывна на $(-2;0)$ и $(0;2)$, так как совпадает на этих интервалах с непрерывными функциями $x+3$ и x^2.

$x=-2$:

Вычисляем предел справа:

$f(-2+0)=\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+0}(x+3)=1$;

$f(-2)=1 \Rightarrow f(x)$ непрерывна справа в точке $x=-2$, так как $f(-2+0)=f(-2)$.

$x=0$:

Вычисляем односторонние пределы:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(x+3)=3 \\ \lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0} x^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 -$$ точка разрыва I рода.

$x=2$:

Вычисляем предел слева:

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x^2=4$;

$f(2)=4 \Rightarrow f(x)$ непрерывна слева в точке $x=2$, так как $f(2-0)=f(2)$.

Замечание. В точке $x=-2$ считаем только предел справа, так как слева от $x=-2$ функция $f(x)$ не задана, а в точке $x=2$ — только предел слева, так как справа от $x=2$ функция не задана.

График $f(x)$ изображен на рис. 11.

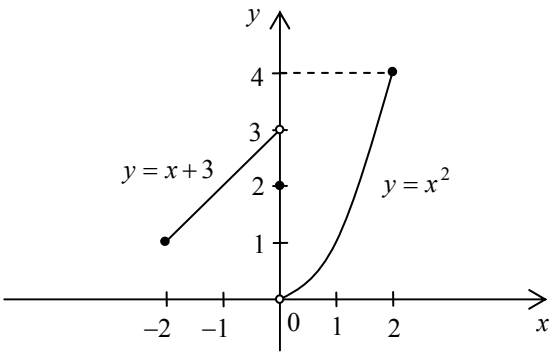


Рис. 11

Пример 2. $f(x)=\begin{cases}-2x, -3 \le x \le 0,\\ \dfrac{1}{x}, 0 < x < 2.\end{cases}$

Решение.

Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $(-3;0)\cup(0;2)$, так как совпадает с непрерывными функциями $-2x$ и $\dfrac{1}{x}$.

Исследуем точки $x=-3$, $x=0$, заметив, что точку $x=2$ не исследуем, так как она не относится к области задания функции.

$\underline{x=-3}$:

Вычисляем предел справа:

$f(-3+0)=\lim\limits_{x\to -3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -3+0}(-2x)=6$;

$f(-3)=6 \Rightarrow f(x)$ непрерывна справа в точке $x=-3$, так как $f(-3+0)=f(-3)$.

$\underline{x=0}$:

Вычисляем односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(-2x)=0$;

$\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty$;

$\Rightarrow x=0$ – точка разрыва II рода.

График $f(x)$ изображен на рис. 12.

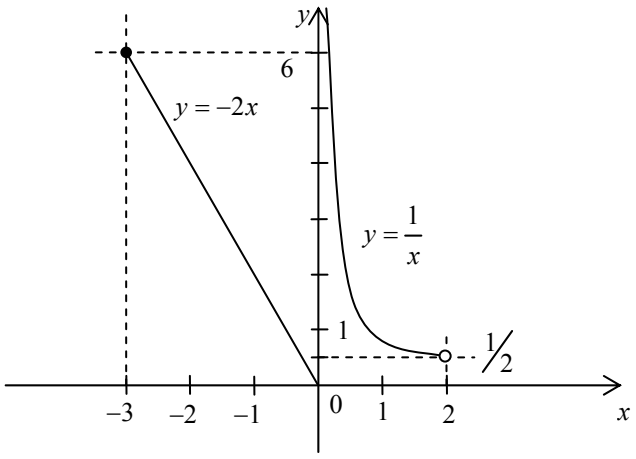


Рис. 12

4. Комплексные числа, действия над ними, решение уравнений в комплексной области (методические указания к п. III а, б)

4.1. Основные определения

Определение 1: Выражение вида $z = x + yi$, где $x, y \in R$, $i^2 = -1$ называется ***комплексным числом***. Число i называют при этом ***мнимой единицей***, а саму форму записи – ***алгебраической***.

Из определения ясно, что число i обладает качественно новым свойством по сравнению с действительными числами, так как квадрат любого действительного числа - величина неотрицательная. Множество комплексных чисел обозначают $\tilde{N}$.

Определение 2: В выражении $z = x + yi$ действительное число x называется ***действительной частью*** комплексного числа и обозначается $\mathrm{Re}\, z$ (от слова "real" – действительный), а действительное число y ***- мнимой частью*** комплексного числа и обозначается $\mathrm{Im}\, z$ (от слова "imaginaire" – мнимый). При этом всегда соблюдается указанный порядок записи.

Пример 1. Для числа $z = -2 + 3i$ имеем $\mathrm{Re}\, z = -2$, $\mathrm{Im}\, z = 3$.

Задачи:

1. Для числа $z = 5 - i$ найти $\mathrm{Re}\, z$ и $\mathrm{Im}\, z$.

Ответ: $\mathrm{Re}\, z = 5$, $\mathrm{Im}\, z = -1$.

2. Записать комплексное число z, если известно, что $\mathrm{Im}\, z = -2$, $\mathrm{Re}\, z = -7$.

Ответ: $z = -7 - 2i$.

Определение 3: Комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются ***равными***, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т.е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$. В частности, $z = 0$ означает: $x = 0$ и $y = 0$. Заметим, что понятия больше и меньше для комплексных чисел не существуют.

Из определения следует, что числа $z = x + 0i = x$ являются действительными числами, т.е. $R \subset C$. При этом числа $z = 0 + yi$ ($y \neq 0$) принято называть ***чисто мнимыми***.

Определение 4: Для комплексного числа $z = x + yi$ число $x - yi$ называется ***сопряженным*** и обозначается $\bar{z}$, т.е. $\bar{z} = x - yi$.

Пример 2. Для данных комплексных чисел записать сопряженные к ним.

а) $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$;

б) $\overline{-1 + 2i} = -1 - 2i$;

в) $\overline{-5 - i} = -5 + i$;

г) $\overline{0 - 3i} = 0 + 3i = 3i$.

4.2. Арифметические действия над комплексными числами

Для чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ ***сложение***, ***вычитание***, ***умножение*** и ***деление*** выполняются как над двучленами вида $a + bt$, где a и b - данные числа. При этом роль величины t играет мнимая единица i и учитывается, что $i^2 = -1$, а также, что результатом является комплексное число, записанное в алгебраической форме.

1) $z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$;

2) $z_1 - z_2 = x_1 + y_1 i - (x_2 + y_2 i) = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i$;

3) $z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$, так как $y_1 y_2 i^2 = -y_1 y_2$.

Заметим, что число $z\bar{z} \in R$. Действительно, $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 \in R$. Ясно также, что $z\bar{z} \geq 0$. Это свойство помогает выполнить операцию деления.

4) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}$; для получения результата в виде $z=x+yi$ необходимо избавиться от мнимой единицы в знаменателе, что достигается домножением и числителя, и знаменателя на $\overline{z_2}$. Итак,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}=\frac{x_1x_2-x_1y_2i+x_2y_1i-y_1y_2i^2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

Заметим, что нет необходимости запоминать формулы для получения z_1z_2 или $\frac{z_1}{z_2}$. Эти действия для конкретных z_1 и z_2 выполняются непосредственно.

Примеры: пусть $z_1=2-i$, $z_2=-3+2i$.

1. Найти $\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)$.

Решение.

$\overline{z_1}=2+i$, тогда $\overline{z_1}z_2=(2+i)(-3+2i)=-6+4i-3i+2i^2=-8+i\Rightarrow \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)=-8$.

2. Вычислить $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3)^2+2^2}=\frac{-6-4i+3i+2i^2}{13}=\frac{-8-i}{13}=-\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i\Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=-\frac{1}{13}.$$

3. Вычислить z_2-z_1.

Решение.

$-3+2i-(2-i)=-3+2i-2+i=-5+3i$.

4.3. Алгебраические действия над комплексными числами

1. Операция ***возведения в степень*** (z^n) вводится как и для действительных чисел: $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\ \text{ñîìíîæèòåëè}}$, $n\in N$.

Интересно рассмотреть степени числа i:

$i^1=i$,

$i^2=-1$,

$i^3=i^2i=-i$,

$i^4=i^2i^2=1$.

Тогда

$i^{4n}=(i^4)^n=1$,

$i^{4n+1}=i^{4^n}i=i$,

$i^{4n+2}=i^{4^n}i^2=-1$,

$i^{4n+3}=i^{4^n}i^3=-i$.

При возведении z в степень естественно пользоваться формулами $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$.

Пример 1. Вычислить $(-1+2i)^2$.

Решение.

$(-1+2i)^2=(-1)^2+2\cdot(-1)\cdot 2i+(2i)^2=1-4i+4i^2=1-4i-4=-3-4i$.

Пример 2. Вычислить $(2+i)^3$.

Решение.

$(2+i)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3=8+12i-6-i=2+11i$.

Пример 3. Найти $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1^2}{z_2}\right)$, если $z_1 = -1+i$, $z_2 = 1+3i$.

Решение.

$z_1^2 = (-1+i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$;

$\frac{z_1^2}{z_2} = \frac{-2i}{1+3i} = \frac{-2i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{-2i(1-3i)}{1+9} = \frac{-2i+6i^2}{10} = -0{,}6-0{,}2i$;

$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1^2}{z_2}\right) = -0{,}2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2^2}\right)$, если $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 2+i$.

Ответ: $\frac{17}{25}$.

2. Вычислить $z_1^3 z_2^2$, если $z_1 = 3+i$, $z_2 = 1-2i$.

Ответ: $18+26i$.

3. Найти $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)$, если $z_1 = -1+i^{163}$, $z_2 = 2-i$.

Ответ: $-\frac{7}{25}$. **Указание**: число z_1 надо сначала записать в алгебраической форме, используя степени числа i.

Из приведенных примеров ясно, что возведение в степень $n > 3$ потребует больших вычислений, поэтому в таком случае используют другие методы, которые мы рассмотрим дальше.

2. Операция ***извлечения корня n-ой степени*** из комплексного числа вводится как операция, обратная возведению в степень.

Определение: Корнем n-ой степени из данного комплексного числа z называется такое число w, что $w^n = z$, $w \in C$.

Таким образом, если $z = x+yi$ и $w = u+vi$, то $(u+vi)^n = x+yi$. Здесь x и y - известные числа, а u, v - искомые.

Возводя в степень левую часть и используя определение равенства комплексных чисел, получаем систему уравнений относительно неизвестных u, v. Однако решение этой системы часто бывает затруднительно. Поэтому, как и в случае возведения z в высокую степень, целесообразно использовать другие методы, связанные с тригонометрической формой записи комплексного числа.

4.4. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

При рассмотрении алгебраической формы записи комплексного числа $z = x+yi$ отмечался определенный порядок записи. Поэтому упорядоченная пара чисел $(x; y)$ однозначно определяет комплексное число z, но она также однозначно определяет точку плоскости, если на ней введена декартова прямоугольная система координат. Тогда естественно изображать комплексные числа точками плоскости, при этом плоскость называют ***комплексной***.

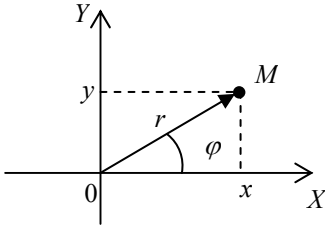


Рис. 13

Точка $M(x;y)$ изображает на комплексной плоскости комплексное число $z=x+yi$. Однако положение точки $M(x;y)$ на плоскости также можно задать длиной r вектора $\overline{OM}$ и величиной φ угла между положительным направлением оси OX и вектором $\overline{OM}$ (рис. 13).

Определение: Расстояние $r=\left|\overline{OM}\right|$ называется ***модулем*** комплексного числа z (обозначение $|z|$). Угол φ называется ***аргументом*** числа z (обозначение $\arg z$).

Ясно, что $|z|\geq 0$, а $-\pi<\arg z\leq\pi$. Значение $\arg z$ на этом промежутке называют также ***главным значением аргумента***. Заметим, что при повороте луча OM на угол $2\pi k$ ($k=\pm1,\pm2,...$) по часовой стрелке или против нее точка M придет в исходное положение. В связи с этим вводится понятие – все значения аргумента (обозначается $\operatorname{Arg} z$). Тогда $\operatorname{Arg} z=\varphi+2\pi k=\arg z+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,...$.

Это понятие очень важно для операции извлечения корня n-ой степени из числа z.

Из определения ясно, что для числа $z=x+yi$ модуль $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}$ ($x\neq 0$). При определении $\arg z$ из последнего уравнения следует учитывать, в какой четверти расположена соответствующая точка:

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x<0, y\geq 0,\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x<0, y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, x=0, y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0, y<0.\end{cases}$$

При решении примеров удобно пользоваться схемой, изображенной на рис. 14.

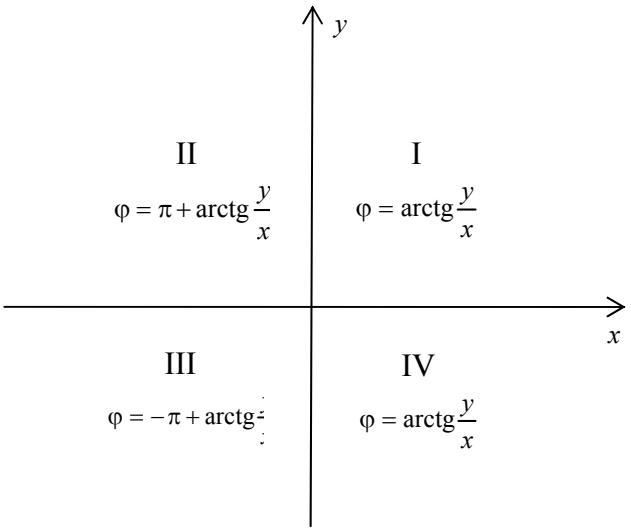


Рис. 14

Пример. Найти модули и аргументы комплексных чисел $z_1=1-i$ и $z_2=-3+2i$.

Решение.

1) $|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$;

$\operatorname{tg}\varphi_1=\dfrac{-1}{1}=-1$; точка $M(1;-1)\in$ IV-ой четверти $\Rightarrow \varphi_1=-\dfrac{\pi}{4}$.

Итак, $|z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$.

2) $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4} = \sqrt{13}$;

$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$; точка $M(-3;2) \in$ II-ой четверти $\Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ (см. рис. 14).

Итак, $|z_2| = \sqrt{13}$, $\varphi_2 = \arg z_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi$.

Здесь следует учитывать, что для $\forall b \in R$ справедливы свойства $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} b < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$.

Надо заметить, что декартовы координаты $(x; y)$ точки M и ее полярные координаты $(r; \varphi)$ связаны между собой (см. рис. 13): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Тогда $z = x + yi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, т. е.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Последняя запись называется ***тригонометрической формой*** записи комплексного числа z.

Примеры. Представить данные числа z ($z = x + yi$) в тригонометрической форме.

1. $z = -2 + 2i$.

а) $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{-2} = -1$, так как точка $(-2;2) \in$ II-ой четверти, то $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (см. рис. 14).

в) $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

2. $z = -1 - \sqrt{3}i$.

а) $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$;

б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$, так как точка $(-1;-\sqrt{3}) \in$ III-ей четверти, то $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 14).

в) $z = 2(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right))$.

3. $z = 4 - 7i$.

а) $r = |z| = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$;

б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$, так как точка $(4;-7) \in$ IV-ой четверти, то $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{4}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{7}{4}$.

в) $z = \sqrt{65}(\cos(-\operatorname{arctg}\frac{7}{4}) + i\sin(-\operatorname{arctg}\frac{7}{4}))$.

Заметим, что в этой записи нельзя сделать упрощения с учетом четности функции $\cos x$ и нечетности функции $\sin x$, так как в этом случае нарушится тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Задачи для самостоятельного решения

Представить данное число $z = x + yi$ в тригонометрической форме.

1. $z = -4 - 3i$

Ответ: $z = 5(\cos(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \pi) + i\sin(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \pi))$.

2. $z = 2 - i$

Ответ: $z=\sqrt{5}(\cos(-\operatorname{arctg}\frac{1}{2})+i\sin(-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}))$.

3. $z=3+3i$

Ответ: $z=3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

4.5. Алгебраические действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$. Из теории степенных рядов известны следующие формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$
$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Тогда $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$, при этом $z=re^{i\varphi}$ - ***показательная форма записи*** комплексного числа. Тогда операция ***возведения в степень*** может быть определена в виде $z^n=r^ne^{in\varphi}$, или

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Для ***извлечения корня n-ой степени*** представим z в тригонометрической форме, используя все значения аргумента ($\operatorname{Arg} z$), т.е. $z=r(\cos(\varphi+2\pi k)+i\sin(\varphi+2\pi k))$ $k=0,\pm1,\pm2,...$, или $z=re^{i(\varphi+2\pi k)}$. Тогда $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, или

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень; $k=0,1,2,...,n-1$, так как дальнейший перебор k приводит к повтору корней (указанный перебор позволяет получить все n различных корней). Полученная формула позволяет решать уравнения вида $z^n=z_0$. С этой целью перед ее применением следует найти модуль r и аргумент φ числа z_0.

Пример 1. Вычислить $(1+i)^{123}$.

Решение.

Найдем модуль и аргумент числа $1+i$: $r=|1+i|=\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{1}=1$; точка $(1;1)\in$ I-ой четверти $\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Поэтому $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, тогда

$$(1+i)^{123}=(\sqrt{2})^{123}(\cos(\frac{\pi}{4}\cdot123)+i\sin(\frac{\pi}{4}\cdot123))=(\sqrt{2})^{122}\sqrt{2}(\cos(30\pi+\frac{3\pi}{4})+i\sin(30\pi+\frac{3\pi}{4}))=2^{61}\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$
$$=2^{61}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=2^{61}(-1+i)=-2^{61}+2^{61}i.$$

Пример 2. Решить уравнение: $z^4+1=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$z^4=-1\Rightarrow z=\sqrt[4]{-1}$, т.е. для решения уравнения нужно найти все корни 4-ой степени из -1. Заметим, что в области действительных чисел это невозможно.

Найдем модуль и аргумент числа $-1=-1+0i$,

$r=|-1|=1$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{0}{-1}=0$.

Так как точка $(-1;0)\in$ II-ой четверти, то $\varphi=\pi$.

Отсюда $z=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4})$, $k=0,1,2,3.$

Итак,

$$z_1 = 1\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ (k=0);$$

$$z_2 = 1\cdot(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ (k=1);$$

$$z_3 = 1\cdot(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ (k=2);$$

$$z_4 = 1\cdot(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ (k=3).$$

Здесь интересно отметить, что числа z_1, z_4 и z_2, z_3 являются сопряженными. В этом примере проявилось свойство уравнения с действительными коэффициентами: если такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень, то обязательно существует еще один, сопряженный ему.

Пример 3. Решить уравнение: $z^3 + i = 0$.

Решение.

$z^3 + i = 0 \Rightarrow z^3 = -i \Rightarrow z = \sqrt[3]{-i}$.

Найдем модуль и аргумент числа $-i$, учитывая, что $-i = 0 - 1i$, т.е. $x = 0$, $y = -1$. Поэтому $r = |-i| = \sqrt{0 + (-1)^2} = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 15).

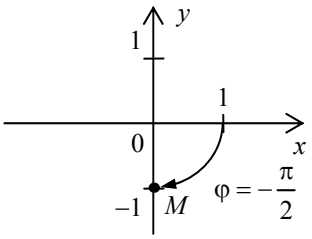


Рис. 15

Здесь точка $M(0;-1)$ изображает комплексное число $-i$.

Поскольку $r = 1, \varphi = -\frac{\pi}{2}$, то

$$z = \sqrt[3]{1}\,(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}), \ k = 0,1,2.$$

Итак,

$$z_1 = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \ (k=0);$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i \ (k=1);$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \ (k=2).$$

Заметим, что для числа i аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так как его изображает точка $(0;1)$. Таким образом, все числа вида $0 + yi$ изображаются точками на оси OY. Эти числа называют чисто мнимыми, а ось OY соответственно ***мнимой осью***.

Интересно посмотреть, как располагаются найденные числа на комплексной плоскости. С этой целью запишем

$$z = \sqrt[3]{-i} = 1\cdot\left[\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k)\right], k = 0,1,2.$$

Отсюда ясно, что z_1, z_2, z_3 лежат на окружности радиуса 1 ($|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$), при этом следующий корень получается из предыдущего поворотом луча на $\frac{2\pi}{3}$.

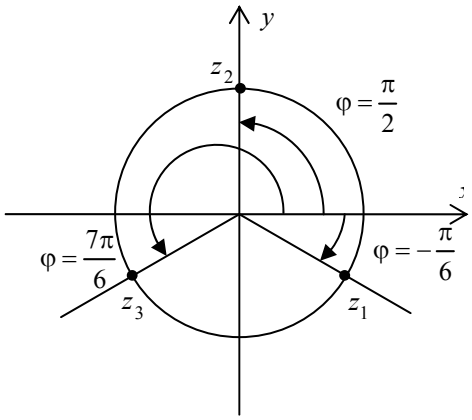


Рис. 16

Пример 4. Решить уравнение: $(z-i)^5 = -1+i$.

Решение.

$(z-i)^5 = -1+i \Rightarrow z-i = \sqrt[5]{-1+i} \Rightarrow z = \sqrt[5]{-1+i}+i.$

Отсюда ясно, что сначала нужно найти все корни пятой степени из числа $-1+i$. Обозначим их $\widetilde{z}$. Найдем модуль и аргумент числа $-1+i$:

$r = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}, \ (r = |\widetilde{z}|),$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{-1} = -1$. Так как точка $(-1;1) \in$ II четверти, то $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (см рис. 14).

Итак,

$$\widetilde{z} = \sqrt[5]{-1+i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5}) + i\sin(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{5})\right] = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{3\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k) + i\sin(\frac{3\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k)\right], \quad k = 0,1,2,3,4,$$ при

этом $z = \widetilde{z} + i.$

$\widetilde{z}_1 = \sqrt[10]{2}(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20})$ ($k = 0$);

$\widetilde{z}_2 = \sqrt[10]{2}(\cos(\frac{3\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi)) = \sqrt[10]{2}(\cos\frac{11}{20}\pi + i\sin\frac{11}{20}\pi)$ ($k = 1$);

$\widetilde{z}_3 = \sqrt[10]{2}(\cos(\frac{3\pi}{20}+\frac{4}{5}\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{20}+\frac{4}{5}\pi)) = \sqrt[10]{2}(\cos\frac{19}{20}\pi + i\sin\frac{19}{20}\pi)$ ($k = 2$);

$\widetilde{z}_4 = \sqrt[10]{2}(\cos(\frac{3\pi}{20}+\frac{6}{5}\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{20}+\frac{6}{5}\pi)) = \sqrt[10]{2}(\cos\frac{27}{20}\pi + i\sin\frac{27}{20}\pi)$ ($k = 3$);

$\widetilde{z}_5 = \sqrt[10]{2}(\cos(\frac{3\pi}{20}+\frac{8}{5}\pi) + i\sin(\frac{3\pi}{20}+\frac{8}{5}\pi)) = \sqrt[10]{2}(\cos\frac{35}{20}\pi + i\sin\frac{35}{20}\pi) = \sqrt[10]{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$ ($k = 4$).

Поскольку $z = \widetilde{z} + i$, получаем искомые корни уравнения:

$z_1 = \sqrt[10]{2}\cos\frac{3\pi}{20} + i(\sqrt[10]{2}\sin\frac{3\pi}{20} + 1);$

$z_2 = \sqrt[10]{2}\cos\frac{11}{20}\pi + i(\sqrt[10]{2}\sin\frac{11}{20}\pi + 1);$

$z_3 = \sqrt[10]{2}\cos\frac{19}{20}\pi + i(\sqrt[10]{2}\sin\frac{19}{20}\pi + 1);$

$z_4 = \sqrt[10]{2}\cos\frac{27}{20}\pi + (\sqrt[10]{2}\sin\frac{27}{20}\pi + 1)i;$

$z_5 = \sqrt[10]{2}\cos\frac{7}{4}\pi + i(\sqrt[10]{2}\sin\frac{7}{4}\pi + 1) = \sqrt[10]{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + i(-\sqrt[10]{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 1),$ т. к. $\cos\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $(-1+\sqrt{3}i)^{58}$.

Ответ: $-2^{57}+2^{57}\sqrt{3}i$.

2. Решить уравнение: $z^4-2i=0$.

Ответ: $z_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$ $(k=0)$;

$z_2=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi)$ $(k=1)$;

$z_3=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi)$ $(k=2)$;

$z_4=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{13}{8}\pi+i\sin\frac{13}{8}\pi)$ $(k=3)$.

3. Решить уравнение: $z^6+9=0$.

Ответ: $z_1=\sqrt[3]{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ $(k=0)$;

$z_2=\sqrt[3]{3}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=\sqrt[3]{3}i$ $(k=1)$;

$z_3=\sqrt[3]{3}(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)=-\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ $(k=2)$;

$z_4=-\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ $(k=3)$;

$z_5=-\sqrt[3]{3}i$ $(k=4)$;

$z_6=\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ $(k=5)$.

4. Решить уравнение: $(z+1)^3=2$.

Ответ:

$z_1=\sqrt[3]{2}-1$ $(k=0)$:

$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})-1=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-1+\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}i$ $(k=1)$;

$z_3=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})-1=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-1-\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}i$ $(k=2)$;

5. Решить уравнение: $z^4+2z^2+4=0$.

Заметим, что здесь следует сначала решить биквадратное уравнение относительно z^2, а затем извлекать квадратные корни из двух найденных чисел.

Ответ:

1. $z^2=\begin{bmatrix}-1+\sqrt{3}i\\-1-\sqrt{3}i\end{bmatrix}$;

2. $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$,

$z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$,

$z_3=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$.

$z_4=\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$,

5. Исследование функции и построение ее графика (методические указания к п. IV)

Условие: исследовать функцию $f(x)$ и построить ее график.

При решении этой задачи используется следующая схема:

1) определяем область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$; точки разрыва;
2) находим точки пересечения с координатными осями: $x=0$ (с OY), $y=0$ (с OX); знак $f(x)$ в различных точках области определения;
3) исследуем $f(x)$ на непрерывность и получаем вертикальные асимптоты (если они есть);
4) исследуем $f(x)$ на четность, нечетность, периодичность;
5) с помощью производной $f'(x)$ находим интервалы возрастания $(f'(x)>0)$ и убывания $(f'(x)<0)$ функции;
   возможные точки локального экстремума как решение совокупности: $\left[\begin{array}{l} f'(x)=0, \\ f'(x)=\text{не существует}, \\ f'(x)=\infty. \end{array}\right.$

При этом достаточным условием экстремума является смена знака $f'(x)$ при переходе через критическую точку.

6) с помощью $f''(x)$ находим интервалы выпуклости вверх $(f''(x)<0)$ и вниз $(f''(x)>0)$ графика функции, точки перегиба как решения $\left[\begin{array}{l} f''(x)=0, \\ f''(x) \text{ не существует.} \end{array}\right.$

При этом достаточным условием точки перегиба является смена знака $f''(x)$ при переходе через критическую точку.

По пунктам 5 и 6 целесообразно сделать таблицу;

7) вычисляем наклонные (правые и левые) асимптоты, которые ищем в виде $y=kx+b$:

   - для правой асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$;

   - для левой асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)$;

Асимптоты существуют только в том случае, когда оба предела существуют и конечны. При $k=0$ получаем горизонтальную асимптоту.

По результатам этого исследования строим график функции, отмечая на координатной плоскости все найденные характерные точки: пересечения с осями, экстремума, перегиба, а также асимптоты.

Пример 1. Исследовать функцию: $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, так как $x^2-1\neq 0$, $E(f)=R$; точки разрыва: $x=\pm 1$.

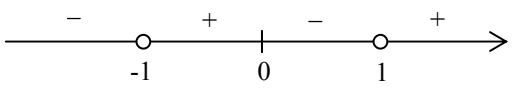
2) Точки пересечения с осью OX:

$$y=0\Rightarrow\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x=0,\ \text{или точка } (0;0);$$

Точки пересечения с осью OY:

$x=0\Rightarrow y=0$.

Исследуем знак $f(x)$:



3) Точки $x=\pm 1$ являются точками разрыва $f(x)$, так как в них $f(x)$ не определена. Вычислим в этих точках односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-\infty;\qquad \lim_{x\to -1+0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-\infty;\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=+\infty;$$

$\Rightarrow$ точки $x=\pm 1$ являются точками разрыва второго рода, а прямые $x=\pm 1$ являются для графика вертикальными асимптотами.

4) область $D(f)$ симметрична, исследуем на четность и нечетность.

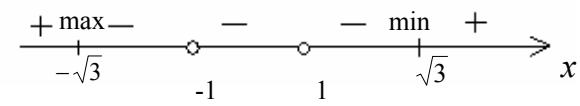
$f(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt[3]{(-x^2)-1}}=-\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-f(x)$, т. е. $f(x)$ - нечетная функция, следовательно, ее график имеет симметрию относительно начала координат.

Периодичность: $f(x+T)=\dfrac{x+T}{\sqrt[3]{(x+T)^2-1}}\neq f(x)$ при $T\neq 0\Rightarrow f(x)$ не является периодической.

5) $y'(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right)'=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\dfrac{3(x^2-1)-2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=$

$=\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$;

$\begin{bmatrix} y'(x)=0 \\ y'(x)=\infty \end{bmatrix}\Rightarrow\ \begin{bmatrix} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \end{bmatrix}$; изучим знак $y'(x)=\dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^4}}$:



Вывод: максимум в точке $(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$, так как знак первой производной меняется с положительного на отрицательный, минимум в точке $(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$, так как знак первой производной меняется с отрицательного на положительный. Соответствующие значения функции:

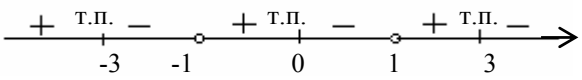
$y(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3-1}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx -1{,}3;\qquad y(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx 1{,}3$.

6) $y''(x)=\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{x^2-3}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}\right)'=\dfrac{1}{3}\dfrac{2x(x^2-1)^{\frac{4}{3}}-(x^2-3)\frac{4}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{8}{3}}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{2x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2-1-\frac{4}{3}(x^2-3)\right)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{8}{3}}}=$

$=\dfrac{1}{3}\dfrac{2x(-\frac{1}{3}x^2+3)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{7}{3}}}=\dfrac{2x(9-x^2)}{9\left(x^2-1\right)^{\frac{7}{3}}}$;

$\begin{bmatrix} y''=0 \\ y''=\infty \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2x(9-x^2)=0 \\ x^2-1=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0,\ x=\pm 3 \\ x=\pm 1 \end{cases}$;

исследуем знак $y''(x)$, где $y'' = -\dfrac{2x(x-3)(x+3)}{9(x-1)^{\frac{7}{3}}(x+1)^{\frac{7}{3}}}$:



Точки $x = \pm 3,\ x = 0$ являются точками перегиба, поскольку знаки второй производной слева и справа от них различны; точки $x = \pm 1 \notin D(f)$, поэтому не могут быть точками перегиба. Найдем точки на графике функции, соответствующие точкам перегиба:

$y(-3) = \dfrac{-3}{\sqrt[3]{(-3)^2 - 1}} = \dfrac{-3}{\sqrt[3]{8}} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ точка $(-3; -\dfrac{3}{2})$,

$y(0) = 0 \Rightarrow$ точка $(0;0)$,

$y(3) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ точка $(3; \dfrac{3}{2})$.

Для данной функции таблицу достаточно сделать только для $x \geq 0$, так как $f(x)$ нечетная. Для функции общего вида таблица делается на всей области определения.

Таблица 6

x	0	(0;1)	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	-	-	∞	-	0	+	+	+
y''	0	-	∞	+	+	+	0	-
y	т. п. 0	↘ ∩	∞	↘ ∪	min $\approx 1{,}3$	↗ ∪	т. п. 1,5	↗ ∩

Вся область определения разделяется критическими точками первой производной y' и второй производной y'' на интервалы.

Обозначения:

↗ - функция возрастает

↘ - функция убывает

∩ - график функции выпуклый вверх

∪ - график функции выпуклый вниз

7) Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx + b$.

Для правой асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(\sqrt[3]{x^2 - 1})x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}} = +\infty \Rightarrow$$ нет правой асимптоты.

Для левой асимптоты: аналогично, $k = 0,\ b = -\infty \Rightarrow$ нет левой асимптоты.

Следовательно, наклонных асимптот нет.

График $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ изображен на рис. 17.

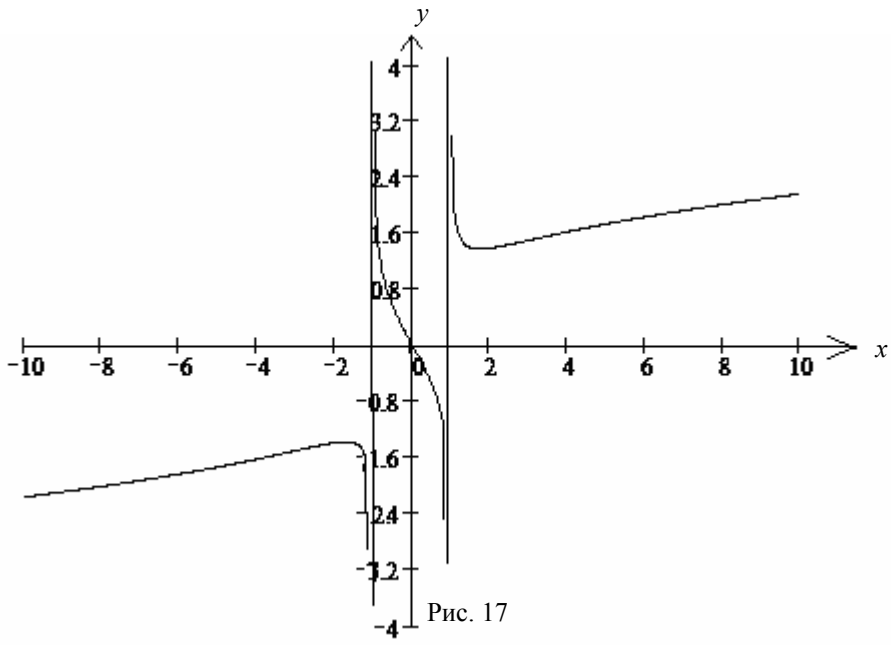


Рис. 17

Замечание.

При построении графика следует учитывать, что если в точке экстремума $f'(x) = 0,$ то касательная к графику параллельна оси *OX*, а если $f'(x) = \infty,$ то касательная к графику параллельна оси *OY* (вертикальная).

Пример 2. Исследовать функцию $y = xe^{-x}$ и построить ее график.

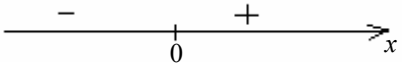
Решение.

1) $D(f) = R; \quad E(f) \subset R.$

2) точки пересечения с осью *OY*: $x = 0 \Rightarrow y = 0; \Rightarrow$ точка (0;0);

Точки пересечения с осью *OX*: $y = 0 \Rightarrow x = 0,$ так как $e^{-x} \neq 0 \Rightarrow$ точка (0;0);

исследуем знак $y(x),$ учитывая, что $e^{-x} > 0$ при любых x.



3) $y = xe^{-x}$ определена и непрерывна на $R \Rightarrow$ нет вертикальных асимптот.

4) $D(f)$ симметрична, вычислим $f(-x)$.

$f(-x) = -xe^{-(-x)} = -xe^{x} \Rightarrow f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x),$

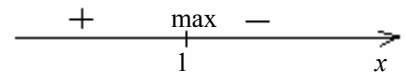
т. е. $y = xe^{-x}$ - функция общего вида.

Периодичность: $f(x+T) = (x+T)e^{-(x+T)} \neq f(x)$ при $T \neq 0$, то есть функция не периодическая.

5) $y'(x) = (xe^{-x})' = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x);$

$$\begin{bmatrix} y'(x) = 0 \\ y'(x) = \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e^{-x}(1-x) = 0 \\ e^{-x}(1-x) = \infty \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 1, \\ x \in \varnothing; \end{bmatrix}$$

исследуем знак $y'(x)$:

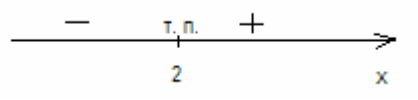


$y_{\max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}4 \Rightarrow$ точка $(1;\frac{1}{e})$ - точка максимума, так как $f'(x)$ меняет знак с положительного на отрицательный.

6) $y''(x) = [e^{-x}(1-x)]' = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(1-x+1) = e^{-x}(x-2);$

$$\begin{bmatrix} y'' = 0 \\ y'' = \infty \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \\ e^{-x}(x-2) = \infty \Rightarrow x \in \varnothing; \end{bmatrix}$$

исследуем знак $y''(x)$:



$y(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}3 \Rightarrow$ точка $(2;\frac{2}{e^2})$ - точка перегиба, так как знаки второй производной слева и справа от нее различны.

7) Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx + b$

Правая асимптота:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (xe^{-x} - 0 \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

где при вычислении предела применено правило Лопиталя; тогда $y = 0$ - правая асимптота.

Левая асимптота:

$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow$ нет левой асимптоты.

Таблица 7

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	0	+
y	↗ ∩	max, $\frac{1}{e}$	↘ ∩	т. п. $\frac{2}{e^2}$	↘ ∪

График $y = xe^{-x}$ изображен на рис. 18.

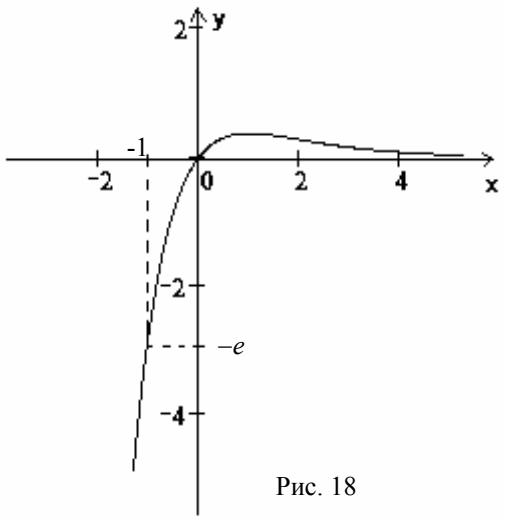


Рис. 18

Замечание.
При построении графика взята еще одна точка:
$y(-1) = -e \approx -2{,}7.$

6. Дифференцирование функций многих переменных и его приложения

6.1. Исследование на экстремум функции $u = f(x, y, z)$ (методические указания к п. V а)

Условие: исследовать функцию $u = u(x; y; z)$ на экстремум.

Необходимое условие: $u'_x = 0,\ u'_y = 0,\ u'_z = 0$ - решение этой системы называют ***стационарной точкой***. Это точка возможного экстремума. В ней применяют достаточное условие. Пусть точка M_0 - стационарная. Тогда обозначим

$u''_{xx}(M_0) = a_{11},\ u''_{xy}(M_0) = a_{12} = a_{21},\ u''_{xz}(M_0) = a_{13} = a_{31};\ u''_{yy}(M_0) = a_{22},\ u''_{yz}(M_0) = a_{23} = a_{32},\ u''_{zz}(M_0) = a_{33}$

Составим матрицу:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, вычислим ее угловые миноры:

$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \det A$

Достаточное условие:

1) $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 \Rightarrow$ минимум в точке M_0;

2) $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ максимум в точке M_0,

3) при любом другом наборе знаков в точке M_0 нет экстремума,

4) если хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ равен нулю, то требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Исследовать на экстремум: $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz - 4x + 4z$.

Решение.

1) Ищем стационарную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, применяя необходимое условие:

$$\begin{cases} u'_x = 2x + 4y - 4, \\ u'_y = 4y + 4x - 4z, \\ u'_z = 6z - 4y + 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0, \\ 4x + 4y - 4z = 0, \\ 6z + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2, & (1) \\ x + y - z = 0, & (2) \\ z = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Из уравнения (1) вычтем уравнение (2):

$y + z = 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3};$

$x = 2 - 2y = 2 - \frac{16}{3} = -\frac{10}{3};$

$M_0(-\frac{10}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{2}{3})$ - стационарная точка.

2) Применяем в точке M_0 достаточное условие:

$u''_{xx} = 2 = a_{11};\ u''_{xy} = 4 = a_{12} = a_{21};\ u''_{xz} = 0 = a_{13} = a_{31};$

$u''_{yy} = 4 = a_{22};\ u''_{yz} = -4 = a_{23} = a_{32};\ u''_{zz} = 6 = a_{33}.$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix};$ $\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 8 - 16 < 0,\ \Delta_3 = 48 - 32 - 96 < 0 \Rightarrow$ в точке M_0 нет экстремума.

Ответ: функция $u(x; y; z)$ не имеет точек экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $u = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 10x_2 - 6x_3 - 2x_1$.

Решение.

1) Ищем стационарную точку, применяя необходимое условие:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + x_3 - 2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 10x_2 + x_3 - 10, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 6x_3 + x_1 + x_2 - 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2 = 0, \\ 10x_2 + x_3 - 10 = 0, \\ 6x_3 + x_1 + x_2 - 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - x_3}{2} = 1 - \dfrac{x_3}{2}, \\ x_2 = \dfrac{10 - x_3}{10} = 1 - \dfrac{x_3}{10}, \\ 6x_3 + 1 - \dfrac{x_3}{2} + 1 - \dfrac{x_3}{10} = 6; \end{cases}$$

$6x_3 - 0{,}6x_3 = 4 \Rightarrow 5{,}4x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = \dfrac{20}{27};$

$x_1 = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{20}{27} = \dfrac{17}{27};$

$x_2 = 1 - \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{20}{27} = \dfrac{25}{27}.$

Значит, точка $M_0\left(\dfrac{17}{27}; \dfrac{25}{27}; \dfrac{20}{27}\right)$ - стационарная.

2) Применяем в точке M_0 достаточное условие:

$a_{11} = 2, a_{12} = a_{21} = 0, a_{13} = a_{31} = 1, a_{22} = 10, a_{23} = a_{32} = 1, a_{33} = 6.$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix};$

$\Delta_1 = 2 > 0;\ \Delta_2 = 20 > 0;\ \Delta_3 = 120 - 10 - 2 > 0 \Rightarrow$ минимум в точке $M_0\left(\dfrac{17}{27}; \dfrac{25}{27}; \dfrac{20}{27}\right)$.

Ответ: функция $u(x_1, x_2, x_3)$ имеет минимум в точке $M_0\left(\dfrac{17}{27}; \dfrac{25}{27}; \dfrac{20}{27}\right)$.

6.2. Геометрические приложения (методические указания к п. V б)

Задачи этого пункта связаны с понятием градиента: $\overline{grad}\, f = (f'_x(M_0); f'_y(M_0); f'_z(M_0))$. Этот вектор задает направление наибольшей скорости роста функции в данной точке. Для функции трех переменных $u = f(x;y;z)$ вектор $\overline{grad}\, f(M_0)$ перпендикулярен к поверхности уровня, т. е. поверхности $f(x;y;z) = C;$ для $u = f(x;y)$ $\overline{grad}\, f(M_0)$ перпендикулярен к линии уровня, то есть к линии $f(x;y) = C.$

Если поверхность задана уравнением $f(x;y;z) = 0,$ то в ее точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ можно написать уравнения касательной плоскости:

$$f'_x(M_0)(x-x_0) + f'_y(M_0)(y-y_0) + f'_z(M_0)(z-z_0) = 0$$

и нормали к поверхности:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{f'_z(M_0)}.$$

Производная по заданному направлению $\bar{l} = (l_1, l_2, l_3)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \frac{l_1}{|\bar{l}|}$, $\cos\beta = \frac{l_2}{|\bar{l}|}$, $\cos\gamma = \frac{l_3}{|\bar{l}|}$, $|\bar{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$.

Следует заметить, что если $\bar{l} \uparrow\uparrow \overline{grad}\, f(M_0),$ то $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = |\overline{grad}\, f(M_0)|.$

Пример 1. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(5;5;15)$.

Решение.

$$u'_x = y + z; \qquad u'_x(M) = 4,$$
$$u'_y = x + z, \qquad u'_y(M) = 5,$$
$$u'_z = x + y, \qquad u'_z(M) = 3.$$

$$\bar{l} = \overline{MN} = (5-2;5-1;15-3); \quad \bar{l} = (3;4;12) \Rightarrow |\bar{l}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13; \quad \cos\alpha = \frac{3}{13}, \ \cos\beta = \frac{4}{13}, \ \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = 4\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{4}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{12+20+36}{13} = \frac{68}{13}.$$

Пример 2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 6$ в точке $M(1;1;-2)$.

Решение.

$$u'_x = 2x, \qquad u'_x(M) = 2;$$
$$u'_y = 2y, \qquad u'_y(M) = 2;$$
$$u'_z = 2z, \qquad u'_z(M) = -4.$$

Касательная плоскость:

$2(x-1)+2(y-1)-4(z+2)=0,$ или $x-1+y-1-2z-4=0 \Rightarrow x+y-2z-6=0.$

Нормаль:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-4}.$$

Пример 3. Найти $\overline{grad}\, f(M)$ и производную в направлении $\overline{grad}\, f(M),$ если $f(x;y;z)=x^3+2xy^2+3yz^2,$ в точке $M(0;1;1)$.

Решение.

$$f'_x=3x^2+2y^2; \qquad f'_x(M)=0+2=2;$$
$$f'_y=4xy+3z^2; \qquad f'_y(M)=3;$$
$$f'_z=6yz; \qquad f'_z(M)=6;$$

$\overline{grad}\, f(M)=(2;3;6);$

$\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}=\left|\overline{grad}\, f(M)\right|=\sqrt{4+9+36}=7.$

Заметим, что можно найти $\bar{e}_0$ – единичный вектор в направлении $\overline{grad}\, f(M_0)$: $\quad \bar{e}_0=\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right).$

7. Геометрические приложения определенного интеграла (методические указания к п. VI)

Это задание связано с геометрическими приложениями определенного интеграла: вычислением площади плоской фигуры, длины дуги кривой, объема тела вращения, объема тела по известному поперечному сечению, площади поверхности вращения. При этом кривая может быть задана в декартовой системе координат в явном виде и в параметрическом, а также – в полярной системе координат.

1. Площадь плоской фигуры.

Пусть $f(x) \geq 0,$ непрерывна на $[a;b]$, тогда $S = \int_a^b f(x)dx$ (рис. 19)

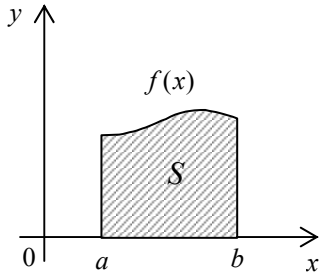


Рис. 19

Пусть $f_2(x) \geq f_1(x),\ f_2(x), f_1(x)$ непрерывны на $[a;b]$, тогда $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$ (рис. 20)

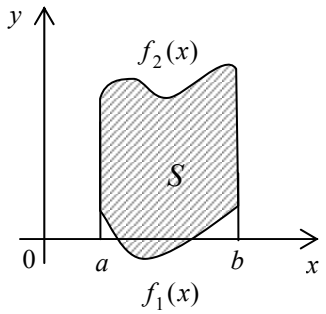


Рис. 20

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс $(y = 0)$.

Решение.

Найдем точки пересечения параболы с осью OX (рис. 21):

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 0, \\ x = 4; \end{bmatrix}$$

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3};$$

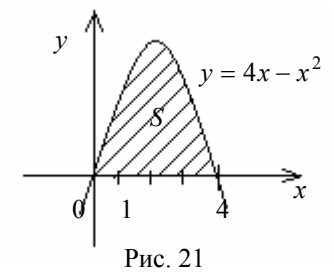


Рис. 21

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

Решение.

Найдем точки пересечения этих кривых, а также точки пересечения параболы с осью OX (для построения):

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow -x = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0; \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \end{cases}$$ - точки пересечения с осью OX (рис. 22).

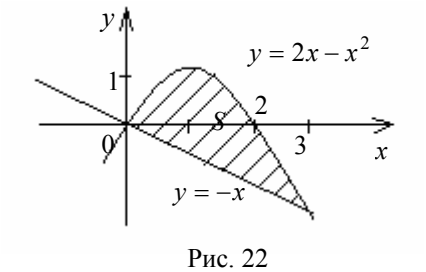


Рис. 22

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27-18}{2} = \frac{9}{2}.$$

Замечание.

При параметрическом задании кривой $x = x(t), y = y(t), a \le x \le b,$ следует найти нижний $t_н$ и верхний $t_в$ пределы для переменной t из условий: $x(t_н) = a, x(t_в) = b;$ если $y(t), x'(t)$ непрерывны на $[t_н; t_в]$, то

$$S = \int_{t_i}^{t_д} y(t)x'(t)dt, \ y(t) \ge 0.$$

Пример 3. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$

Решение.

Для первой арки циклоиды $t \in [0; 2\pi],$ при этом $t = 0 \Rightarrow x = 0, t = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi a$ (рис. 23).

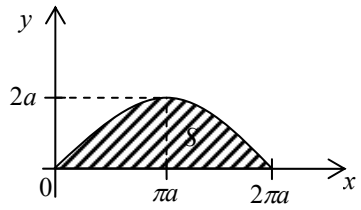


Рис. 23

Для использования формулы вычислим $x'(t) = a(1 - \cos t).$ Тогда

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = a^2 (\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = a^2 (\frac{3}{2}2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi - 0) = 3\pi a^2.$$

В полярной системе координат кривая задается уравнением $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta.$

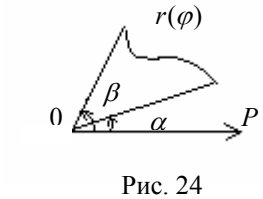


Рис. 24

Тогда площадь S криволинейного сектора: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi),\ a > 0.$

Решение.

В силу симметрии можно вычислить $\frac{1}{2}S,$ где $0 \le \varphi \le \pi$ (рис. 25).

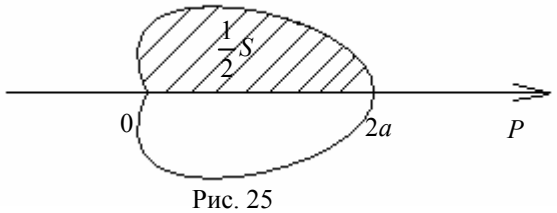


Рис. 25

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi \Rightarrow\ S = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi)d\varphi = a^2(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi} = a^2(\frac{3}{2}\pi+2\sin\pi+\frac{1}{4}\sin 2\pi-0) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

2. Вычисление длины l дуги кривой L.

a) $L: y = f(x),\ x \in [a;b] \Rightarrow l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$ явное задание кривой (в декартовой системе координат);

b) $L: x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1,t_2] \Rightarrow l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt;$ параметрическое задание кривой;

c) $L: r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\beta] \Rightarrow l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi;$ задание кривой в полярной системе координат.

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y = \ln\sec x,$ содержащейся между $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{3}.$

Решение.

Кривая задана в явном виде (п. a)): $f(x) = \ln\sec x,\ a = 0,\ b = \frac{\pi}{3}.$ Тогда

$$y = \ln\sec x = \ln\frac{1}{\cos x} = -\ln\cos x; \qquad f'(x) = -\frac{(-\sin x)}{\cos x} = \operatorname{tg} x;$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \left\langle 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx = (\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln|\sqrt{3}+2| - \ln|0+1| = \ln(2+\sqrt{3}),$$

так как $\ln 1 = 0.$

Заметим, что $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x},$ так как $x \in [0;\frac{\pi}{3}]$ и, следовательно, $\cos x \ge 0.$

Пример 2. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0; 2\pi]$.

Решение.

Кривая задана в параметрической форме (п. b)). Вычислим:

$x'(t) = a(1 - \cos t),\ y'(t) = a\sin t,$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = \left\langle 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} \right\rangle = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \left\langle \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = \left|\sin \frac{t}{2}\right| = \sin \frac{t}{2},\ \text{так как}\ \sin \frac{t}{2} \ge 0\ \text{на} \right.$$

$$\left. [0; 2\pi] \right\rangle = 2a\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -2a \cdot 2\cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a.$$

Пример 3. Найти длину l дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение.

Кривая задана в полярной системе координат (п. c)).

В силу симметрии (см. рис. 25 предыдущего пункта) можно найти $\frac{1}{2} l,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

$r = a(1 + \cos \varphi),\ r'(\varphi) = -a\sin \varphi;$

$$\frac{1}{2} l = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos \varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos \varphi)}\, d\varphi = \left\langle 1 + \cos \varphi = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right\rangle = a\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\sin \frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = \ = 4a(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = 4a.$$

Здесь $\sqrt{4\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 2\left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| = 2\cos \frac{\varphi}{2},$ так как $0 \le \frac{\varphi}{2} \le \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos \frac{\varphi}{2} \ge 0.$

Тогда $l = 2 \cdot 4a = 8a.$

3. Вычисление объема тела по известной площади поперечного сечения.

$V = \int_a^b S(z)dz,$ где $S(z)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси OZ; ограниченное тело расположено в полосе между плоскостями $z = a$ и $z = b$; $S(z)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1,\ \ z = 0,\ z = 2.$

Решение.

В плоскости $z = \text{const}$ имеем:

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + z^2,$ или $\frac{x^2}{4(1+z^2)} + \frac{y^2}{9(1+z^2)} = 1,$ т. е. сечение данной поверхности плоскостью, перпендикулярной оси OZ, есть эллипс. Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ тогда его площадь $S = \pi ab.$ Здесь $a^2 = 4(1+z^2) \Rightarrow a = 2\sqrt{1+z^2},\ b^2 = 9(1+z^2) \Rightarrow b = 3\sqrt{1+z^2},$ тогда

$$S(z) = \pi \cdot 2\sqrt{1+z^2} \cdot 3\sqrt{1+z^2} = 6\pi(1+z^2) \Rightarrow\ V = \int_0^2 6\pi(1+z^2)dz = 6\pi(z + \frac{z^3}{3})\Big|_0^2 = 6\pi(2 + \frac{8}{3}) = 28\pi.$$

4. Вычисление объемов тел вращения.

А) При вращении криволинейной трапеции вокруг оси OX: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ (рис. 26).

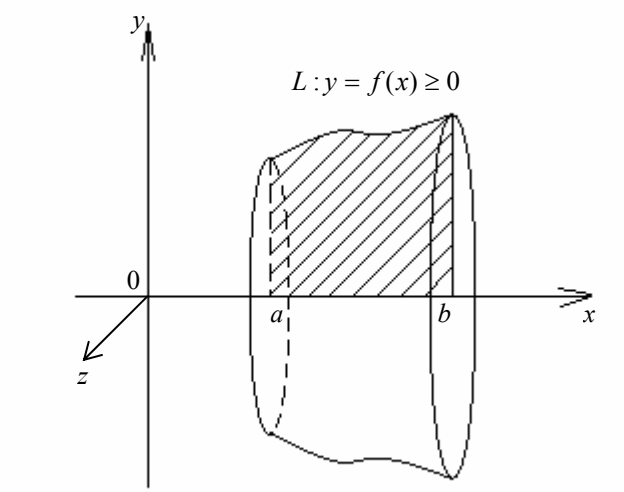


Рис. 26

Б) При вращении криволинейной трапеции вокруг оси OY: $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx,\ a \geq 0.$ (рис. 27)

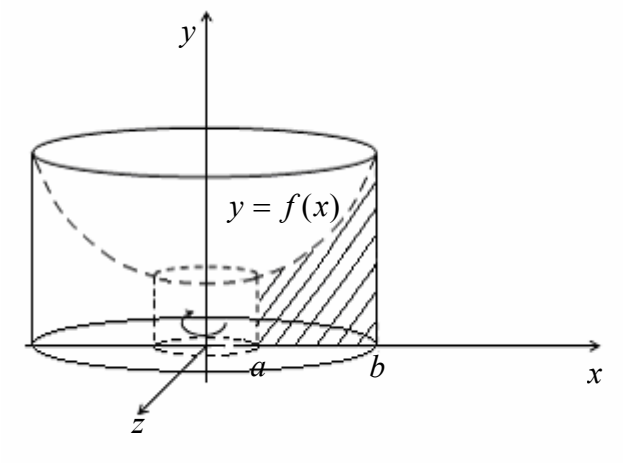


Рис. 27

Пример 1.

Найти объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 1$:

а) вокруг оси OX (рис. 28),

b) вокруг оси OY (рис. 29).

Решение.

а) $V_x = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$;

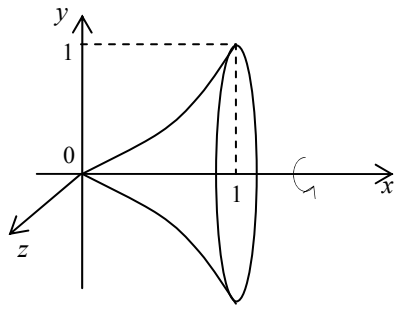


Рис. 28

b) $V_y = 2\pi\int\limits_0^1 x\cdot x^{\frac{3}{2}}dx = 2\pi\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx = 2\pi\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{7}\pi;$

здесь из уравнения $y^2 = x^3$ имеем $y = x^{\frac{3}{2}} \geq 0$, т. е. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

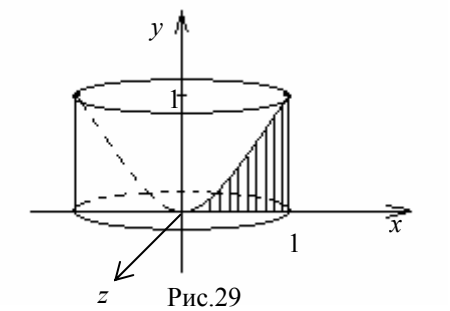


Рис.29

В) При параметрическом задании кривой L имеем: $V_x = \pi\int\limits_{t_1}^{t_2}(y(t))^2 x'(t)dt,\ V_y = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)x'(t)dt,$ где $x(t_1) = a,\ x(t_2) = b,\ x \in [a;b].$

Пример 2.

Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ вокруг оси OY.

Решение.

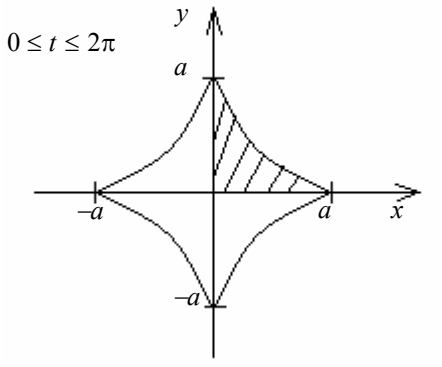


Рис. 30

Тело вращения получается при вращении вокруг оси OY правой половины плоской фигуры (рис. 30).

В силу симметрии фигуры относительно оси OX можно вычислять половину объема вращением вокруг оси OY заштрихованной фигуры. Здесь $x \in [0;a],$ при этом $x(0) = a\cos^3 0 = a,\ \ x(\frac{\pi}{2}) = a\cos^3\frac{\pi}{2} = 0,$ т. е. $t_н = \frac{\pi}{2},\ t_в = 0,\ \ x'(t) = -3a\cos^2 t\cdot\sin t$, тогда:

$$\frac{1}{2}V_y = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cos^3 t\cdot a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt = 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\sin^4 t\,dt = \Big\langle$$ при изменении порядка пределов интегрирования интеграл изменил знак; $\cos^5 t = \cos^4 t\ \cos t = (1-\sin^2 t)^2\cos t\ \Big\rangle =$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^2\sin^4 t\cos t\,dt = \Big\langle\ \sin t = u,\ du = \cos t\,dt,\ u_н = \sin 0 = 0,\ u_в = \sin\frac{\pi}{2} = 1\ \Big\rangle =$$

$$= 6\pi a^3\int_0^1(1-u^2)^2u^4du = 6\pi a^3\int_0^1(u^4-2u^6+u^8)du = 6\pi a^3\left(\frac{u^5}{5}-\frac{2}{7}u^7+\frac{u^9}{9}\right)\Big|_0^1 = 6\pi a^3(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}) =$$

$$= 6\pi a^3\frac{63-90+35}{5\cdot7\cdot9} = 2\pi a^3\frac{8}{105} = \frac{16}{105}\pi a^3.$$ Тогда $V_y = \frac{32}{105}\pi a^3$.

С) При вращении криволинейного сектора вокруг полярной оси объем V_p тела вращения равен:

$V_p = \frac{2}{3}\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$, где $\varphi_1 \ge 0$, $r(\varphi)$ – непрерывна на $[\varphi_1,\varphi_2]$. (рис. 31)

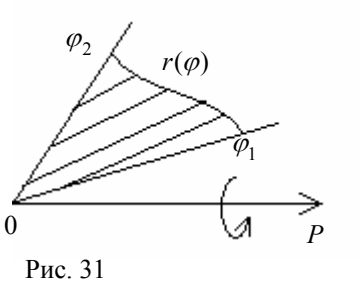


Рис. 31

Пример 3.

Найти объем тела, которое получается при вращении кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение.

Тело получается при вращении верхней части кардиоиды, т. е. $0 \le \varphi \le \pi$ (рис. 32).

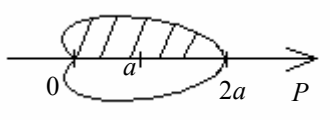


Рис. 32

$$V_p = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi = \Big\langle u = 1+\cos\varphi,\ du = -\sin\varphi d\varphi,\ u_н = 2,\ u_в = 0\Big\rangle = -\frac{2}{3}\pi a^3\int_2^0 u^3du =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3\int_0^2 u^3du = \frac{2}{3}\pi a^3\frac{u^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

5. Вычисление площадей поверхностей вращения.

Рассматривается криволинейная трапеция, ограниченная кривой L, отрезком $[a;b]$ оси OX, отрезками прямых $x=a,\ x=b.$ (рис. 33)

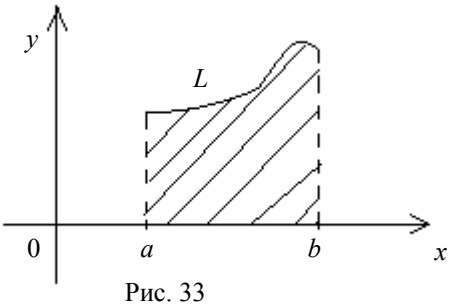


Рис. 33

При вращении этой фигуры вокруг оси OX кривая L описывает в пространстве поверхность, площадь которой S_x может быть вычислена с помощью определенного интеграла.

Рассмотрим различные случаи задания кривой:

1) $L:\ y=f(x), x\in[a,b];\ f(x)\ge 0,\ \ f'(x)$ непрерывна на $[a;b]$ (явное задание кривой в декартовой системе координат), тогда

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$

2) $L:\ x=x(t),\ y=y(t), t\in[\alpha;\beta],\ y(t)\ge 0,\ y'(t), x'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$ (параметрическое задание кривой), тогда

$$S_x = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt;$$

3) $L: r=r(\varphi), \varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$. Кривая L задается в полярной системе координат. (рис. 34)

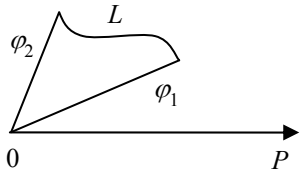


Рис. 34

Тогда при вращении криволинейного сектора вокруг полярной оси кривая L описывает поверхность, площадь которой S_p может быть вычислена по формуле:

$$S_p = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример 1.

Определить площадь поверхности шарового пояса, полученного при вращении части полуокружности $x^2+y^2=R^2$, где $a\le x\le b$, вокруг оси OX. (рис. 35)

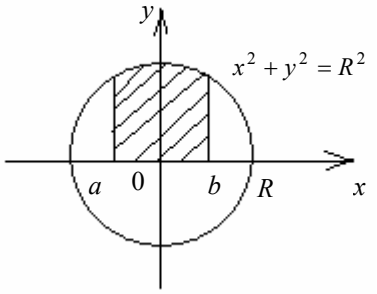


Рис. 35

Решение. Кривая задана в декартовой системе координат, поскольку $L:\ x^2+y^2=R^2$, или $y=\sqrt{R^2-x^2}$, т. к. $y\ge 0, x\in[a;b]$. Тогда используем формулу из пункта 1).

Здесь $y'=(\sqrt{R^2-x^2})'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\Rightarrow y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$; поэтому

$$S_x=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}dx=2\pi R\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

$$=2\pi R\int_a^b dx=2\pi R\cdot x\Big|_a^b=2\pi R(b-a).$$

Пример 2. Найти площадь, образованную вращением первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$ вокруг оси OX (рис. 36).

Решение.

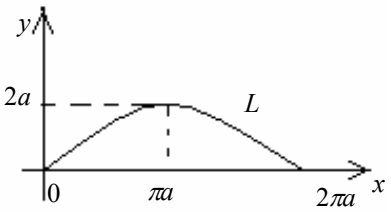


Рис. 36

Для первой арки циклоиды $0\le t\le 2\pi$. Кривая задана в параметрической форме, поэтому используем формулу из пункта 2).

Вычислим $x'(t)=a(1-\cos t),\ y'(t)=a\sin t$ и

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}=a\sqrt{2-2\cos t}=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}=a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2a\sin\frac{t}{2},\ \text{т. к. для } t\in[0;2\pi] \text{ имеем: } 0\le\frac{t}{2}\le\pi \text{ и } \sin\frac{t}{2}\ge 0,\ \text{тогда}$$

$$S_x=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\frac{t}{2}=8\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=\left\langle\text{замена}:\cos\frac{t}{2}=u,\ du=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt\Rightarrow\sin\frac{t}{2}dt=-2du,\ u_н=\cos 0=1,\ u_в=\cos\pi=-1\right\rangle=$$

$$=8\pi a^2\cdot(-2)\int_1^{-1}(1-u^2)du=16\pi a^2\int_{-1}^{1}(1-u^2)du=16\pi a^2(u-\frac{u^3}{3})\Big|_{-1}^{1}=16\pi a^2(1-\frac{1}{3}-(-1)+(-\frac{1}{3}))=$$

$$=16\pi a^2(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3})=16\pi a^2\frac{4}{3}=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

Пример 3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $L: r=a\cos\varphi\quad(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2})$, вокруг полярной оси.

Решение. Кривая задана в полярной системе координат, поэтому используем формулу из пункта 3). Здесь $r=a\cos\varphi,\ r'=-a\sin\varphi,$ тогда

$$\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}=a>0.$$

Поэтому

$$S_p=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\sin\varphi\,ad\varphi=2\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=\pi a^2(-\frac{1}{2})\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{\pi a^2}{2}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{\pi a^2}{2}(-1-1)=\pi a^2.$$

8. Отыскание области сходимости степенного ряда (методические указания к п. VII)

Условие: найти область сходимости степенного ряда.

Для решения этой задачи следует:

1) записать ряд из абсолютных величин $|u_n|$;

2) найти интервал сходимости, применяя к ряду из абсолютных величин либо признак Даламбера, либо признак Коши. Известно, что эти признаки применимы для рядов $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$. При этом, по признаку Даламбера вычисляют $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = q$, а по признаку Коши $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = q$. Полученный предел для сходимости ряда должен быть меньше единицы.

3) исследовать граничные точки интервала.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{(3n^2-5n)4^n}$.

Решение.

1. Общий элемент ряда из абсолютных величин имеет вид:

$$|u_n| = \frac{|x-3|^{2n}}{(3n^2-5n)4^n}.$$

2. Применим признак Даламбера. Так как

$$|u_{n+1}| = \frac{|x-3|^{2(n+1)}}{(3(n+1)^2-5(n+1))4^{n+1}} = \frac{|x-3|^{2n+2}}{(3n^2+6n+3-5n-5)4^{n+1}} = \frac{|x-3|^{2n+2}}{(3n^2+n-2)4^{n+1}},$$

то вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{2n+2}}{(3n^2+n-2)4^{n+1}} \cdot \frac{(3n^2-5n)4^n}{|x-3|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^2}{4} \cdot \frac{3n^2-5n}{3n^2+n-2} = \left\langle \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n}{3n^2+n-2} = 1 \right\rangle =$$

$$= \frac{|x-3|^2}{4} < 1;\ |x-3|^2 < 4 \Rightarrow |x-3| < 2, \quad \text{или } -2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5 - \text{интервал сходимости, } R = 2 - \text{радиус сходимости.}$$

3. Исследуем граничные точки.

Подставляя $x = 5$ в исходный степенной ряд, получим числовой ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5-3)^{2n}}{(3n^2-5n)4^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(3n^2-5n)2^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n^2-5n}; \qquad \frac{1}{3n^2-5n} > 0, \ n \geq 2.$$

Для исследования этого ряда на сходимость применим признак сравнения. Возьмем ряд с общим элементом $V_n = \dfrac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n^2-5n} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-5n} = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{изучаемый ряд сходится.}$$

Подставляя $x=1$ в исходный степенной ряд, получим числовой ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1-3)^{2n}}{(3n^2-5n)4^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{2n}}{(3n^2-5n)4^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}2^{2n}}{(3n^2-5n)2^{2n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n^2-5n};$$

Этот ряд уже изучен: он сходится.

Ответ: $1\le x\le 5$ - область сходимости ряда.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение.

1. Общий элемент ряда из абсолютных величин имеет вид:

$$\left|u_n\right|=\frac{\left|x-2\right|^n}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

2. Применим признак Даламбера. Вычислим

$$\left|u_{n+1}\right|=\frac{\left|x-2\right|^{n+1}}{(n+2)\ln(n+2)}\quad\text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_{n+1}\right|}{\left|u_n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-2\right|^{n+1}(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)\left|x-2\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|x-2\right|\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}=\left|x-2\right|<1,\quad R=1,\ \text{тогда}\ -1<x-2<1,\ \text{или}$$

$1<x<3$ – интервал сходимости.

3. Исследуем граничные точки.

Подставляя $x=3$ в исходный степенной ряд, получим числовой ряд с общим элементом

$$u_n=\frac{(3-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}=\frac{1^n}{(n+1)\ln(n+1)}=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\ge 0.$$

Применим интегральный признак:

$$f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}>0,\ \text{непрерывная, невозрастающая на } [1;+\infty].$$

Вычислим

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\ln(x+1)}d(\ln(x+1))=\lim_{b\to+\infty}(\ln\left|\ln(x+1)\right|)\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(\ln\left|\ln(b+1)\right|-\ln\left|\ln 2\right|)=\infty\Rightarrow\ \text{интеграл расходится, следовательно, изучаемый ряд расходится.}$$

Подставим $x=1$. Общий элемент ряда u_n имеет вид:

$u_n=\frac{(1-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}=\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ – ряд с таким общим элементом - знакочередующийся; сначала изучим его на абсолютную сходимость.

$\left|u_n\right|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}\right|=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-$ ряд с таким общим элементом изучен, он расходится. Тогда исходный ряд изучим на условную сходимость: так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ знакочередующийся и

$\left|u_n\right|=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\to 0$ при $n\to\infty$, то сравним $\left|u_n\right|$ и $\left|u_{n+1}\right|$. Здесь

$\left|u_{n+1}\right| = \dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)} < \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \left|u_n\right| \Rightarrow$ по признаку Лейбница ряд условно сходится.

Ответ: $1 \le x < 3$ – область сходимости ряда.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}(x-1)^n$;

Решение.

1. Общий элемент ряда из абсолютных величин имеет вид

$\left|u_n\right| = \dfrac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}\left|x-1\right|^n > 0$;

2. Применим признак Коши, так как все выражение в степени, зависящей от n.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|x-1\right|\dfrac{(2n-1)^2}{(3n-2)^2} = \left|x-1\right|\dfrac{4}{9} < 1 \Rightarrow \left|x-1\right| < \dfrac{9}{4},$

$R = \dfrac{9}{4}; -\dfrac{9}{4} < x-1 < \dfrac{9}{4} \Rightarrow -\dfrac{5}{4} < x < \dfrac{13}{4}$ – интервал сходимости.

3. Изучим граничные точки.

Подставляя $x = \dfrac{13}{4}$ в исходный степенной ряд, получим числовой ряд с общим элементом

$u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}\left(\dfrac{9}{4}\right)^n$ – ряд с таким общим элементом – знакочередующийся.

Изучим его на абсолютную сходимость:

$\left|u_n\right| = \left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}\left(\dfrac{9}{4}\right)^n$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}\dfrac{9}{4} = 1$, т. е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости.

Тогда вычислим

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-3}{6n-4}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-4+1}{6n-4}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{6n-4}\right)^{(6n-4)\frac{1}{6n-4}2n} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{6n-4}} = e^{\frac{2}{3}} \ne 0 \Rightarrow$ ряд расходится, так как для сходящегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right| = 0.$

Подставляя $x = -\dfrac{5}{4}$ в исходный степенной ряд, получим числовой ряд с общим элементом

$u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}\left(-\dfrac{9}{4}\right)^n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}(-1)^n\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n} = (-1)^{2n+1}\left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n} =$

$= -\left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}$ – общий элемент знакоотрицательного ряда, который получен из ряда с общим элементом $\left(\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}$, рассмотренным в первой граничной точке, умножением на (-1). Известно, что умножение ряда на число, не равное 0, не меняет его поведения в смысле сходимости. Поэтому изучаемый ряд расходится.

Ответ: $-\dfrac{5}{4} < x < \dfrac{13}{4}$ – область сходимости ряда.

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М: Наука, 1988.

2. Методические указания по математике «Действительные и комплексные числа» для слушателей подготовительных курсов и подготовительного отделения / Молодожникова Р.Н., Якимова А.С.; под ред. Р.Н. Молодожниковой. - М.: МАИ, 1985.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу (для ВТУЗОВ) // Под ред. Б.П. Демидовича. - М: Наука, 1969.